Kurzanleitung zu Differentialgleichungen 1. & 2. Ordnung

9. November 2008

Die vorliegende "Kurz"-Anleitung soll Differentialgleichungen behandeln, wie sie mir in den ersten vier Semestern meines Physikstudiums unter den Kugelschreiber gekommen sind. Und zwar ab der dritten Woche im ersten Semester, ohne Vorwarnung, ohne Erklärung. Diese - obwohl abhärtende - Frust kann dem geneigten Leser erspart bleiben.

Die ursprüngliche Fassung war zwei knappe, schludrig geschriebene Seiten lang, enthielt nur Formeln und ein paar Stichworte, und sie wurde den Besuchern meiner Tutorübung zur Experimentalphysik I (WS08/09) an der Tafel präsentiert. Dass die vorliegende Fassung sich hier über ein wenig mehr als zwei Seiten erstreckt, liegt an meinem nun integrierten Redefluß und meinem Unvermögen, Sachen nur halbfertig einzureichen.

Ich habe mich bemüht, die Schritte ausreichend aufzudröseln und genügend Erklärungen einzufügen, jedoch kann ich das nur bis einem bestimmten Punkt machen, ohne den Inhalt zu sehr zu verdünnen. Einiges wird man als Erstsemester sicherlich nicht sofort nachvollziehen können. In diesem Fall sind Papier, ein spitzer Bleistift und etwas Nachrecheneifer angebracht. Natürlich darf Geduld nicht fehlen.

Ansonsten hoffe ich, dass ihr diese Anleitung sinnvoll und hilfreich finden werdet.

Fehler, Hinweise, Vorschläge jederzeit an william.hefter "ät" mytum.de

Die jeweils aktuelle Fassung dieses Dokumentes liegt immer unter http://www.elehq.de/uni/ws0809_ep1_uebung

William Hefter
München, im November 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wird zuerst behandelt, weil sich daraus automatisch die Methodik für lineare DGL 1. Ordnung ergibt.

Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung: enthält die Funktion $y(x)$ und ihre 1. und/oder 2. Ableitung

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

- a, b und c sind *Konstanten*. Lineare DGL 2. Ordnung mit *nicht-konstanten* Koeffizienten sind eine Geschichte für sich.
- $f(x)$ ist die *Inhomogenität* oder *Anregung*. Für $f(x) = 0$ ist die DGL *homogen*, für $f(x) \neq 0$ *inhomogen*.

Allgemeine Lösung: ist die Summe aus der Lösung der homogenen (die *homogene* Lösung) und der Lösung der inhomohenen DGL (die *partikuläre* Lösung). Wir lösen also auf jeden Fall die Gleichung

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

und, falls $f(x) \neq 0$, auch noch die volle inhomogene DGL. Es gilt also

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x)$$

i) Lösung der homogenen DGL

Ich will also $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ lösen.

Dazu brauche ich eine Funktion, dessen 1. und 2. Ableitung nicht viel anders als die Funktion selbst aussehen. Übrig bleibt eigentlich nur die *Exponentialfunktion* e^x. (Schlau, wer an Sinus und Cosinus denkt, diese sind jedoch nur Linearkombinationen von komplexen e-Funktionen.)

Exponentialansatz:

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

mit irgendeinem Wachstumsfaktor λ, den es zu bestimmen gilt. Ableiten und Einsetzen liefert eine quadratische Gleichung in λ:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

was doch schonmal vielversprechend aussieht, denn diese Gleichung ist ja leicht zu lösen, ihre Lösungen lauten

$$\lambda_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es gibt also nicht nur *einen* Wachstumsfaktor, der die homogene DGL erfüllt, sondern gleich *zwei*, was an der Ordnung der DGL liegt. Der Lösungsraum zu einer DGL 2. Ordnung ist 2-dimensional. Die allgemeine homogene Lösung ist eine Linearkombination der zwei (linear unabhängigen) Lösungen.

Als Analogie: der gesamte zweidimensionale Raum $\mathbb{R}^2$ wird aufgespannt von den x- und y-Achsen, also von den zwei *Basisvektoren* $\vec{e_x} = \binom{1}{0}$ und $\vec{e_y} = \binom{0}{1}$, und mit der *Linearkombination* $\vec{a} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y}$ kann der gesamte $\mathbb{R}^2$ erreicht werden, wenn man x und y alle möglichen Werte annehmen lässt. Genauso verhält es sich mit den beiden Lösungen der DGL, die durch λ_1 und λ_2 charakterisiert sind. Die weitere Beschreibung hilft hoffentlich beim Verstehen.

Wir müssen jetzt drei Fälle unterscheiden:

$b^2 - 4ac > 0$**:** Dann sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und, wie oben erwähnt, ist die homogene Lösung eine Linearkombination der beiden Basisfunktionen:

$$y_{hom}(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten A und B.

$b^2 - 4ac = 0$**:** Damit ist $\lambda_1 = \lambda_2$. Die homogene Lösung lautet hier

$$y_{hom}(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_2 x}$$

$b^2 - 4ac < 0$**:** Ein sehr interessanter Fall. Es ist $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ und damit

$$\lambda_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \alpha \pm \mathrm{i}\omega$$

Die Exponentialfunktion hat also ein komplexes Argument. Was nun? Die Rettung naht:

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$$

Obwohl die beiden komplexen Lösungen mathematisch richtig sind, haben sie keine physikalische Aussage (Was ist eine komplexe Länge? Ein komplexer Winkel?), weshalb wir daraus reelle Funktionen machen:

$$\begin{aligned} y_{hom}(x) &= A\mathrm{Re}\left(e^{\lambda_1 x}\right) + B\mathrm{Im}\left(e^{\lambda_1 x}\right) \\ &= Ae^{\alpha x}\cos(\omega x) + Be^{\alpha x}\sin(\omega x) \end{aligned}$$

Dasselbe könnte man für λ_2 machen, jedoch bekommt man wieder nur cos und sin mit einem Minus, das man auch in die Konstante B absorbieren kann. Bringt also wenig, und die Lösung ist so sehr schön.

ii) Lösung der inhomogenen DGL

Ich will nun die volle inhomogene DGL, $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$, lösen. Während bei der homogenen eine Funktion gesucht war, die beim Ableiten möglichst die gleiche Form behalten soll, scheint es hier sinnvoll, dass die partikuläre Lösung $y_p(x)$ die Struktur von $f(x)$ wiederspiegeln soll. Ich wähle also $y_p(x)$ unter dem Motto **"Ansatz vom Typ rechte Seite"**, und zwar nach folgendem Muster:

Anregung $f(x)$	Ansatz für $y_p(x)$
$a_o + a_1 x + a_2 x^2 + ...$	$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ...$
$Ce^{\beta x}$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$	$De^{\beta x}$
$Ce^{\beta x}$ $(\lambda_1 = \lambda_2)$	$Dxe^{\beta x}$
$C\mathrm{Re}w(x)$ oder $C\mathrm{Im}w(x)$	siehe unten

- In den ersten drei Fällen: Ableiten und Einsetzen von diesem Ansatz für $y_p(x)$ in die inhomogene DGL liefert eine Bestimmungsgleichung für die Konstanten, die im Ansatz verwendet werden. Damit ist dann auch die partikuläre Lösung bestimmt.
- Wichtiger Spezialfall: ist der vierte Fall. Er führt unweigerlich zu Rechnungen im Komplexen, was am Anfang ungewohnt und schwer, im Endeffekt jedoch nützlich und einigermaßen simpel ist. Für den Fall, dass die Anregung irgendeine Konstante C mal dem Real- oder Imaginärteil (cos oder sin) ist, ist die folgende DGL zu lösen:

$$az''(x) + bz'(x) + cz(x) = Cw(x)$$

d.h. die gleiche DGL, nur mit der vollständigen komplexen Funktion $Cw(x)$ als Anregung. Als Ansatz für $z(x)$ dient $z(x) = Dw(x)$. Die eigentliche partikuläre Lösung $y_p(x)$ erhält man dann mit

$$y_p(x) = \mathrm{Re}\left(z(x)\right) \text{ bzw. } y_p(x) = \mathrm{Im}\left(z(x)\right)$$

iii) Anfangsbedingungen einsetzen

Da wird nun unsere vollständige allgemein Lösung haben, nämlich

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x)$$

bleibt nur noch, sie an den gegebenen speziellen Fall anzupassen, der vorliegt und durch die **Anfangsbedingungen** bestimmt ist:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0') &= y_0' \end{aligned}$$

Diese Anfangsbedingungen, von denen für eine DGL 2. Ordnung auch immer zwei benötigt werden, bestimmen die Konstanten A und B unserer homogenen Lösung und damit die spezielle Form unserer DGL für den vorliegenden Fall.

Wichtig: die Anfangsbedingungen werden erst nach dem Bestimmen der *vollständigen* allgemeinen Lösung eingesetzt, nicht schon nach dem Bestimmen der homogenen Lösung.

2 Lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wird vollständig analog zu DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten gelöst. Man erhält nur ein λ und damit nur eine Basisfunktion und benötigt auch nur eine Anfangsbedingung.

3 Nichtlineare homogene DGL 1. Ordnung mit nicht-konstantem Koeffizienten: "Separable DGL"

Ein etwas komplexerer, aber immer noch leicht lösbarer Typ von DGL 1. Ordnung lautet

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$$

z.B. $y' = x^2\sqrt{1-y^2}$. Die Funktion $g(y)$ muss also nicht linear in y sein.

Sieht kompliziert aus, die Rettung ist ein aus Physiker-Sicht vollständig legitimer "Trick" - der Mathematikern Bauchschmerzen bereitet. Bekanntermaßen ist

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Also trenne (separiere) ich einfach mal die Variablen x und y:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Das kann ich einfach integrieren:

$$\int^{y} \frac{d\tilde{y}}{g(\tilde{y})} = \int^{x} d\tilde{x} f(\tilde{x}) + C$$

Mit irgendeiner Konstante C, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt ist. Diese Methode setzt drei Sachen voraus:

- $\frac{1}{g(y)}$ muss eine elementare Stammfunktion besitzen
- der Anwender muss diese kennen und
- die Stammfunktion muss sich nach y auflösen lassen, damit eine explizite Lösung angegeben werden kann.

Zur Verdeutlichung findet sich unten bei den Beispielen auch eins hierzu.

4 Lineare inhomogene DGL 1. Ordnung mit nicht-konstantem Koeffizienten

Ein Typ, der der separablen DGL 1. Ordnung ähnlich sieht, jedoch im Grunde einfacher zu lösen ist:

$$y'(x) = f(x) \cdot y(x) + p(x)$$

Was ist hier also anders? Bemerke:

- Die DGL ist *linear* in $y(x)$
- Es gibt eine *Inhomogenität* $p(x)$

Das kennen wir doch irgendwie schon, oder? Nur die nicht-konstante Koeffizientenfunktion $f(x)$ ist neu und verhindert den direkten Exponentialansatz. Jedoch stellt sich heraus, das genau der herauskommt. Was bleibt, ist das *getrennte Vorgehen*: zuerst die *homogene* DGL lösen, dann die *inhomogene*.

i) Homogene DGL: Bekannte separable DGL

Ein Blick auf

$$y' = f(x) \cdot y$$

genügt, um zu erkennen, dass diese DGL separabel ist. Mit dem Ansatz aus Kapitel 3 finden wir:

$$\int^{y} \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} = \int^{x} f(\tilde{x}) d\tilde{x} + \tilde{C}$$

Die linke Seite lässt sich leicht integrieren, heraus kommt

$$\begin{aligned} \ln y &= \int^{x} f(\tilde{x}) d\tilde{x} + \tilde{C} \\ &= F(x) + \tilde{C} \end{aligned}$$

Oder auch

$$\begin{aligned} y_{hom}(x) &= e^{\tilde{C}} e^{F(x)} \\ &= C e^{F(x)} \end{aligned}$$

ii) Inhomogene DGL: Variation der Konstanten

Nun bleibt noch, eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL zu bestimmen. Hier gilt: "Erfolg heiligt alles." Die Methode heisst **Variation der Konstanten**. Wir nehmen einfach an, dass

$$y_p(x) = C(x) \cdot e^{F(x)}$$

Mal ausprobieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= C'(x) \cdot e^{F(x)} + C(x) \cdot F'(x) \cdot e^{F(x)} \\ &= C' \cdot e^{F(x)} + f(x) \cdot C \cdot e^{F(x)} \\ &= C' \cdot e^{F(x)} + f \cdot y \end{aligned}$$

Das setzen wir in unsere inhomogene DGL ein und es folgt:

$$C'(x) \cdot e^{F(x)} + f(x) \cdot y(x) = f(x) \cdot y(x) + p(x)$$

Also muss gelten

$$\begin{aligned} C'(x) &= p(x) \cdot e^{-F(x)} \\ \Leftrightarrow C(x) &= \int^{x} p(\tilde{x}) \cdot e^{-F(\tilde{x})} d\tilde{x} \end{aligned}$$

Das lässt sich (hoffentlich) leicht integrieren, um $C(x)$ bestimmen zu können.

iii) Anfangsbedingungen

Die allgemeine Lösung ist also

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{F(x)} \left(C + \int^{x} p(\tilde{x}) \cdot e^{-F(\tilde{x})} d\tilde{x} \right) \\ &\text{mit } F(x) = \int^{x} f(\tilde{x}) d\tilde{x} \end{aligned}$$

in diese wird dann auch die *Anfangsbedingung* $y(x_0) = y_0$ eingesetzt, um die konstante C und damit die angepasste spezielle Lösung zu bestimmen.

5 Beispiele

5.1 Lineare homogene DGL 1. Ordnung mit konstantem Koeffizienten: Zerfallsgesetz

5.1.1 Mit Exponentialansatz

Das einfachste Beispiel überhaupt. Demonstriert den Exponentialansatz an einer einfachen DGL 1. Ordnung. Die DGL für das Zerfallsgesetz erhält man, wenn man davon ausgeht, dass die momentane Zerfallsrate proportional zur momentanen Anzahl der Kerne mal irgendeiner Konstanten ist. Mathematisch:

$$\dot{N}(t) = -\lambda N(t)$$

Ich wähle also den Ansatz $N(t) = e^{\alpha t}$ (bemerke: der Wachstumsfaktor heisst hier α, weil im Zerfallsgesetz die Zerfallskonstante schon λ heisst; ist aber alles nur Kosmetik), leite ab, setze ein und erhalte

$$\alpha = -\lambda$$

und damit $N(t) = Ce^{-\lambda t}$. Bleibt noch die Konstante zu bestimmen, das können wir mit der *Anfangsbedingung*: Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist noch kein Kern zerfallen, also $N(0) = N_0$ und damit $C = N_0$, also

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Und das ist tatsächlich das Zerfallsgesetz.

5.1.2 Mit Trennung der Variablen

Dasselbe Ergebnis erhalte ich auch, wenn ich die DGL als *separable* DGL erkenne und löse, dann gilt nämlich

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \frac{dN}{dt} = -\lambda N \\ \Leftrightarrow \frac{dN}{N} &= -\lambda dt \end{aligned}$$

Das lässt sich leicht integrieren:

$$\begin{aligned}\ln N &= \tilde{C} - \lambda t \\ \Leftrightarrow N(t) &= e^{\tilde{C}} e^{-\lambda t} \\ \Leftrightarrow N(t) &= C e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

Und das ist ja bekannt. Beide Wege führen hier zum Erfolg.

5.2 Separable nichtlineare homogene DGL 1. Ordnung mit nicht-konstantem Koeffizienten

Ich wähle hier das Beispiel von weiter oben, nämlich

$$y' = \frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt{1 - y^2}$$

Sieht böse aus, aber nicht aufgeben, ich gehe einfach nach Schema F vor und separiere die Variablen:

$$\int^{y} \frac{d\tilde{y}}{\sqrt{1-\tilde{y}^2}} = \int^{x} \tilde{x}^2 d\tilde{x}$$

"Zufälligerweise" hat die linke Seite eine elementare Stammfunktion, und zwar

$$\arcsin y = \frac{1}{3} x^3 + C$$

Und das ist wunderbar und es folgt

$$y(x) = \sin\left(\frac{1}{3} x^3 + C\right)$$

Mit noch durch die Anfangsbedingungen zu bestimmender Konstante C.

5.3 Lineare inhomogene DGL 1. Ordnung mit nicht-konstantem Koeffizienten

Beispiel aus einer Analysis-II-für-Physiker-Klausur; zu lösen ist

$$y' = \frac{2x}{x^2+1} y + 1$$

Systematisches Vorgehen nach Beschreibung: zuerst löse ich die *homogene* DGL

$$y'_{hom} = \frac{2x}{x^2+1} y_{hom}$$

mittels Separation oder über die oben angegebene Formel

$$y_{hom} = C e^{F(x)}$$

mit

$$F(x) = \int^{x} \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln\left(x^2+1\right)$$

Also folgt

$$y_{hom}(x) = C e^{\ln\left(x^2+1\right)} = C\left(x^2+1\right)$$

Für die *inhomogene* DGL variiere ich nun die Konstante, ich setze an mit $y_p(x) = C(x) \cdot \left(x^2+1\right)$, in die DGL eingesetzt:

$$y'_p = C'\left(x^2+1\right) + C \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1} C \cdot \left(x^2+1\right) + 1$$

Aufgelöst nach C':

$$\begin{aligned}C' &= \frac{1}{x^2+1} \\ \Leftrightarrow C &= \int^{x} \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x\end{aligned}$$

Und die vollständige Lösung ist:

$$\begin{aligned}y(x) &= y_{hom}(x) + y_p(x) \\ &= C\left(x^2+1\right) + \arctan x \left(x^2+1\right) \\ &= \left(x^2+1\right) \cdot \left(C + \arctan x\right)\end{aligned}$$

5.4 Lineare inhomogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: Harmonischer Oszillator

5.4.1 Ungedämpfter Harmonischer Oszillator ohne Antrieb

Aus dem Kräftegleichgewicht an einem Fadenpendel lässt sich unter der Annahme kleiner Auslenkwinkel ($\sin\varphi \approx \varphi$) schnell die DGL des **Harmonischen Oszillators** herleiten. Dies ist mit einiger Wahrscheinlichkeit die in den ersten Semesters des Physikstudiums am häufigsten auftretende DGL, daher lohnt es sich, sie genauer kennenzulernen. Für den einfachsten Fall der fehlenden Reibung und des fehlenden Antriebs ergibt sich die **DGL des Harmonischen Oszillators**:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Die ist schnell mit dem Exponentialansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ gelöst, als Gleichung für λ ergibt sich

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

Also

$$\lambda_{1/2} = \pm \mathrm{i}\omega_0$$

Wir erhalten also ein komplexes Lösungssystem und damit eine reelle sin/cos-Lösung, was auch Sinn macht: Bei einer Schwingung sollte sich irgendein Vorgang periodisch wiederholen. Würde sich ein reelles Lösungssystem mit Exponentialfunktionen ergeben, würde das irgendein Wachstumsverhalten darstellen, was nicht zu einem Oszillator passt. Hier gilt also:

$$\begin{aligned}x(t) &= A\mathrm{Re}\left(e^{\lambda_1 t}\right) + B\mathrm{Im}\left(e^{\lambda_2 t}\right) \\ &= A\cos\left(\omega_0 t\right) + B\sin\left(\omega_0 t\right)\end{aligned}$$

Wählen wir nun als Anfangsbedingung z.B. $x(0) = 0$ sowie $\dot{x}(0) = v_0$, so folgt $A = 0$ und $B = \frac{v_0}{\omega_0}$, also $x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$, was genau das Schwingverhalten eines solchen Pendels darstellt.

5.4.2 Ungedämpfter Harmonischer Oszillator mit Anregung

Das war ja einfach genug, oder? Drehen wir den Schwierigkeitsgrad hoch: Das Pendel soll angetrieben werden; der Aufhängepunkt des Pendels soll mit einer konstanten Kraft F bewegt werden. Es ergibt sich die **inhomogene DGL des Harmonischen Oszillators**:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}$$

Die homogene Lösung ist von oben bekannt, wenden wir uns der inhomogenen zu. Die *Anregung* hat die Form eines konstanten Polynoms, also wähle ich als Ansatz gemäß der Tabelle weiter oben

$$x_p(t) = C$$

Die zweite Ableitung fällt raus, in die DGL eingesetzt ergibt sich $C = \frac{F}{m\omega_0^2}$ und schliesslich

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \frac{F}{m\omega_0^2}$$

für die allgemeine Lösung. Nun sind die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ interessant. Sie ergeben $A = -\frac{F}{m\omega_0^2}$ und $B = 0$, also

$$x(t) = \frac{F}{m\omega_0^2}\left(1 - \cos(w_0 t)\right)$$

Das beschreibt genau ein ruhendes Pendel, das durch eine äußere Kraft langsam ausgelenkt wird und zu schwingen beginnt.

5.4.3 Gedämpfter Harmonischer Oszillator mit Antrieb

Nun der richtig interessante Fall: Ein tatsächliches Pendel wird irgendeine Art von Reibungskraft erfahren, die wohl proportional zur Geschwindigkeit sein wird. Damit es doch nicht ganz so einfach wird, treiben wir das Ganze mit einer periodischen Kraft an, die eine *andere* Frequenz als das Pendel hat.

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f\cos(\omega_{ext} t)$$

Die Form des Geschwindigkeits-Koeffizienten hat rein kosmetische Gründe und wird gleich selbst erklärt.

Erstens: Keine Panik! Das gibt ein bisschen komplexe Rechnung, ein paar lange zeilenübergreifende Gleichungen, aber nichts *wirklich* schwieriges.

<u>i) homogene DGL</u>

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Mit dem schon bekannten Exponentialansatz:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_{1/2} &= -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

Aufgrund der Wurzel sind nun die drei Fälle zu unterscheiden, die eingangs schon erwähnt wurden:

- <u>$\beta^2 > \omega_0^2$:</u> Der sogenannte "Kriechfall". $\lambda_{1/2}$ sind reell und < 0, die homogene Lösung lautet

  $$x_{hom}(t) = Ae^{-|\lambda_1|t} + Be^{-|\lambda_2|t}$$

  Ist die Dämpfung zu stark, findet also keine Schwingung statt, sondern der Oszillator fällt exponentiell in seine Ruhelage zurück.
- <u>$\beta^2 = \omega_0^2$:</u> "Aperiodischer Grenzfall". $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Ebenfalls exponentieller Abfall, allerdings wesentlich schneller als beim Kriechfall.

  $$x_{hom}(t) = Ae^{-|\lambda_1|t} + Bte^{-|\lambda_1|t}$$

  Die Exponentialfunktion strebt hier viel schneller gegen Null, als der Faktor t wachsen kann.
- <u>$\beta^2 < \omega_0^2$:</u> Der eigentlich interessante Fall. λ_1 und λ_2 sind komplexe Zahlen:

  $$\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= -\beta \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \\ &= -\beta \pm \mathrm{i}\omega_{effektiv} \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} x_{hom}(t) &= A\mathrm{Re}\left(e^{\lambda_1 t}\right) + B\mathrm{Im}\left(e^{\lambda_2 t}\right) \\ &= Ae^{-\beta t}\cos\left(\omega_{eff} t\right) + Be^{-\beta t}\sin\left(\omega_{eff} t\right) \end{aligned}$$

  Der Oszillator führt eine gedämpfte ($e^{-\beta t}$) Schwingung mit verminderter Frequenz aus, wie auch zu erwarten.

<u>ii) inhomogene DGL</u>

Nun wird es interessant. Die Inhomogenität hat die Form

$$g(x) = f\cos(\omega_{ext} t) = \mathrm{Re}\left(fe^{\mathrm{i}\omega_{ext} t}\right)$$

Ein Blick in meine Tabelle weiter oben verrät mir, was zu tun ist: Ich muss eine komplexe DGL mit $fe^{\mathrm{i}\omega_{ext} t}$ als Inhomogenität lösen, also

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = fe^{\mathrm{i}\omega_{ext} t}$$

Dafür gibt es wiederrum einen Eintrag in der Tabelle, der Ansatz für $z(t)$ muss hier lauten:

$$z(t) = Ae^{\mathrm{i}\omega_{ext} t}$$

Wie schon angekündigt, wird es hier zu ein wenig Rechnung im komplexen kommen. Wer darin noch nicht sattelfest ist, kann sich das Ergebnis anschauen und später, wenn das i ihn nicht mehr abschreckt, zurückkehren.

Ich leite also den Ansatz entsprechend ab und setze ihn in die DGL, und erhalte (die Exponentialfunktionen kürzen sich wieder raus):

$$-\omega_{ext}^2 A + \mathrm{i}2\omega_{ext} A\beta + A\omega_0^2 \quad = \quad f$$

und erhalte damit für meine Konstante A

$$A = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega_{ext}^2 + \mathrm{i}2\omega_{ext}\beta}$$

Dieser Bruch ist ungünstig, weil sich der komplexe Anteil im Nenner befindet und man so den Real- und Imaginärteil nicht einfach ablesen kann. In solch einem Fall sollte man *immer* seine Konstante, seine Funktion oder was auch immer man betrachtet auf eine Form $a + \mathrm{i}b$ bringen. Das ist auch immer möglich, weil dies ja gerade die allgemeine Form einer komplexen Zahl ist.

Bekanntermaßen ist $z \cdot \bar{z} = |z| = (\mathrm{Re} z)^2 + (\mathrm{Im} z)^2 = a^2 + b^2$. Wir erweitern also den Bruch mit dem komplexe konjugierten des Nenners:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{f}{\omega_0^2 - \omega_{ext}^2 + \mathrm{i}2\omega_{ext}\beta} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega_{ext}^2 - \mathrm{i}2\omega_{ext}\beta}{\omega_0^2 - \omega_{ext}^2 - \mathrm{i}2\omega_{ext}\beta} \\
&= \frac{f}{\left(\omega_0^2 - \omega_{ext}^2\right)^2 + (2\omega_{ext}\beta)^2} \cdot \left(\omega_0^2 - \omega_{ext}^2 - \mathrm{i}2\omega_{ext}\beta\right) \\
&= \frac{f}{\left(\omega_0^2 - \omega_{ext}^2\right)^2 + 4\omega_{ext}^2\beta^2} \cdot \left((\omega_0^2 - \omega_{ext}^2) - \mathrm{i}2\omega_{ext}\beta\right)
\end{aligned}$$

Und daran, auch wenn der Ausdruck wild aussieht, kann man den Real- und Imaginärteil leicht ablesen.

Weiter: das Kapitel zu linearen DGL 2. Ordnung sagt mir, wie's weitergeht:

$$\begin{aligned}
x_p(t) &= \mathrm{Re}\left(Ae^{\mathrm{i}\omega_{ext}t}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left\{A\left(\cos(\omega_{ext}t) + \mathrm{i}\sin(\omega_{ext}t)\right)\right\} \\
&= \frac{f}{\left(\omega_0^2 - \omega_{ext}^2\right)^2 + 4\omega_{ext}^2\beta^2} \cdot \left((\omega_0^2 - \omega_{ext}^2)\cos(\omega_{ext}t) + 2\omega_{ext}\beta\sin(\omega_{ext}t)\right)
\end{aligned}$$

womit wir unsere partikuläre Lösung der inhomogenen DGL bestimmt hätten (zur Berechnug: sowohl A als auch $e^{\mathrm{i}\omega_{ext}t}$ sind komplexe Zahlen. Also multiplizieren wir den Ausdruck aus und sortieren wieder nach Real- und Imaginärteil. Es ergeben sich die beiden angegebenen Terme. Nachrechnen!) Es mag wild aussehen und das ist es zweifellos auch, aber es ist alles elementare Mathematik. Kein Integrieren, Beweisen, etc., es läuft alles mit stumpfer Rechnung, bei der man freilich nicht den Überblick verlieren darf.

iii) Allgemeine Lösung / Anfangsbedingungen

Nach wie vor ist die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_{hom}(t) + x_p(t) \\
&= Ae^{-\beta t}\cos\left(\omega_{eff}t\right) + Be^{-\beta t}\sin\left(\omega_{eff}t\right) + x_p(t)
\end{aligned}$$

(auf das Ausschreiben von $x_p(t)$ verzichte ich hier), in der es nur noch die Konstanten A und B zu bestimmen gibt und die von den jeweiligen Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
x(0) &= x_0 \\
\dot{x}(0) &= v_0
\end{aligned}$$

abhängen.